

# 中心极限定理

Guangyao Zhao

2022-08-29

## Contents

定义 .....	1
例子 .....	2

在客观世界中许多随机变量，他是由大量的相互独立的随机因素综合影响形成的。而每个随机因素在总的的影响中所起的作用都是微小的。这种随机变量往往近似服从正态分布。中心极限定理指的是，在独立随机变量的个数不断增加时，这些微小因素的的和的分布趋于正态分布。

中心极限定理的研究对象是随机变量之和，也就是叠加后的结果。中心是重要的意思。

## 定义

独立同分布的中心极限定理的前提是样本  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  相互独立且服从同一个分布。具有数学期望和方差。

- 期望:  $E(X_k) = \mu$
- 方差:  $D(X_k) = \sigma^2$

随机变量之和  $\sum_{k=1}^n X_k$  (新的随机变量) 标准化后:

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

叠加后的期望为  $n\mu$ , 方差为  $\sqrt{n}\sigma$

## 例子

加法器同时收到 20 个噪声电压  $V_k$ ，假设它们是相互独立的随机变量，且都在区间  $(0, 10)$  上服从均匀分布，记作  $V = \sum_{k=1}^{k=20} V_k$ ，求  $P\{V > 105\}$  的近似值。

均匀分布的期望和方差：

- 期望:  $E(V_k) = \frac{0+10}{2} = 5$
- 方差:  $D(V_k) = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12}$

独立同分布中心极限定理：

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=20} V_k - 20 \times 5}{\sqrt{20} \sqrt{\frac{100}{12}}} \sim N(0, 1)$$

问题转化为：

$$\begin{aligned} P \left\{ \sum_{k=1}^{k=20} V_k > 105 \right\} &= P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{k=20} V_k - 20 \times 5}{\sqrt{20} \sqrt{\frac{100}{12}}} > \frac{105 - 100}{\sqrt{20} \sqrt{\frac{100}{12}}} \right\} \\ &= 1 - \Phi(0.387) \end{aligned}$$