向量的基本几何意义

Guangyao Zhao

2022-03-02

Contents

向量概念的几何意义 1
向量内积的几何意义 2
向量叉积的几何意义 3
向量混合运算的几何意义 3
向量除法的几何意义 3
向量几何 VS 解析几何 4

本章重点需要理解向量的意义，以及向量的基本运算，即加法、内积和叉积。

向量概念的几何意义

1. 向量是一个既有大小又有方向的量，这个量本身就是个几何的概念。
2. 在物理学中把向量叫做矢量。矢就是箭，向量如同一根箭一样有头部和尾部，箭在空间自由的飞行中箭杆的长度不会变，这一点和向量相同；同时箭在无重力作用的理想情况下方向不会改变。也就是说长度和方向不变的理想之箭就是一个向量。所以向量的" 飞行" 称之为平移，这种允许在一条直线上平移的向量称为自由向量。
3. 物理界将 vector 称之为矢量，数学界称之为向量。
4. 向量的几何表示为 AB；代数表示为 a；手写时因为表示困难，所以写为 $\vec{a}$.
5. 虽然向量独立于任何坐标系之外，但是为了与解析技术联系起来实现对向量的计算，数学上还是必须将向量放在某一个坐标系下研究。**如果把空间中所有的向量的尾部都拉到坐标原点，这样** n 维空间就可以和 n 维向量空间建立一一对应的关系。
6. 一旦确定好坐标系，一个向量就是与一个点对应，而点是所谓坐标的有序数组表示的，因此就可以把向量用有序数组表示，有了有序数组就可以运算了。使用有序数组表述的向量是以原点为起点的向量末端的坐标值表示，并把坐标值用圆括号括起来，如 $a = (x, y, z)$。在此处的有序数组 (x, y, z) 就是向量。

7. 一个向量可以分解为三个单位坐标向量的线性表示，比如向量 $(1,1,1)$ 分解如下：$(1,1,1) = (1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1) = i+j+k$
8. 任意一个向量都可以表示 为 $a=(x,y,z)=xi+yj+zk$
9. 向量的运算有加法、减法和乘法。乘法又分为点积和叉积。除法少有提及，它需要同时用到内积和叉积后面会具体解释原因。
10. 向量被看做线性空间或向量空间中的一个元素，但是与点不同。**向量表示的是两点之间的位移而不是具体的空间的物理位置，是独立于坐标系的**，这就是为什么在描述向量的运算法则的时候不需要画出坐标系，但一个点离开坐标系就无法表示。
11. 向量实际上使用一个**点对**表示的，比如 AB 表示起点为 A 终点为 B，**之所以把一个点与一个向量相对应，是因为默认所有的向量都是从原点出发的。**
12. 向量的加法满足平行四边形法则。

向量内积的几何意义

1. 向量的内积 (dot product) 也称之为数量积、标积、点积。内积的结果是个标量，定义如下：

$$a \cdot b = ab\cos\theta$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

2. 根据内积的定义可对向量求长度：

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

3. 那么内积的两个定义有几何关系吗？答案是有的。假设 a_y 和 a_z 均为 0，那么：$a \cdot b = a_x b_x$，其中 $a_x = a$，ab_x 的含义为 a 的长度乘以 b 在 a 方向上的分量，即投影。投影表示为 $b_x = b\cos\theta$。因此 $a \cdot b = ab\cos\theta$ 得以证明。

4. 向量内积的几何解释就是一个向量在另一个向量上的投影的积，也就是同方向的积。

5. 如果想要将一个向量变换到新的坐标系，只需要对新坐标系轴向量进行内积运算即可（这个理论极其重要）。

6. 内积还有一种比较直观的解释：

    1. 当两个向量的内积 >0 时，同方向
    2. 当两个向量的内积 $=0$ 时，互相垂直
    3. 当两个向量的内积 <0 时，反方向

向量叉积的几何意义

1. 叉积 (cross product) 也称之为外积，因为叉积或产生新的一维向量。两个向量确定了一个二维的平面，叉积会产生垂直于这个平面的向量。
2. 叉积的定义也有两个：

$$
\begin{aligned}
a \times b &= (ab\sin\theta)n_0 \\
a \times b &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - z_y b_x)
\end{aligned}
$$

$a \times b$ 为一个新生成的向量，这个向量垂直于 a 和 b 展成的平面，向量的大小等于以 a 和 b 为邻边所张成的平行四边形的面积 S；这一点很重要，在矩阵变换中有很多应用。本质上叉积和行列式的运算法则一致，具体请参考行列式一章。

垂直于平面的有两个方向，规定用右手法则来确定叉积的方向：按照 $a \times b$ 的运算顺序，右手的四指平直指向第一个向量 a，然后弯曲指向向量 b，右手大拇指的指向为 $a \times b$ 的方向。$b \times a$ 与其相反。

向量混合运算的几何意义

1. 向量的加法结合律：$(a+b)+c = a+(b+c)$
2. 向量的数乘分配律：$k(a+b) = ka+kb$
3. 向量的点积分配律：$a(b+c) = ab+ac$

相比于点积，叉积的几何意义要稍显复杂。向量叉积的满足分配律：$(a+b)\times c = a\times b + a\times c$。即向量的叉积也满足三角形法则。

向量除法的几何意义

1. 由 $a \cdot b = ab\cos\theta = c$ 可知，a 和 c 只能确定 b 在 a 上的投影，并不能直接确定 b，所以内积没有除法。
2. 由 $a \times b = (ab\sin\theta)n = c$ 可知，a 和 c 只能确定 $b\sin\theta$ 的大小，并不能分别直接确定 b 和 θ，所以外积没有除法。

不妨尝试将两者联系：

$$
\begin{cases}
a \cdot b = c \\
a \times b = c
\end{cases}
$$

对于 $a \times b = c$ 两边左叉乘 a 得到 $a \times b = c$ 并用二重向量叉积公式 (此公式比较复杂，可以当作已知条件看待) $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ 得到：

$$a \times (a \times b) = a(a \cdot b) - b(a \cdot a)$$

联立以上两个方程得到：

$$b = \frac{ca - ac}{a \cdot a}$$

至此，b 得到了唯一确定的值。也就是说同时知道内积和外积的结果才能进行向量的除法运算。

向量几何 VS 解析几何

向量几何揭示了解析几何的本质，向量几何使用数量积使之成为超越解析几何的存在。两条直线的夹角，可以由两个方程的系数求得。但是在向量机和里，其可用两条直线的方向向量的数量积表示。本来很费事的夹角问题，通过一次运算就解决了。