向量组及向量空间的几何意义

Guangyao Zhao

2022-07-26

Contents

此章主要内容为向量空间的一些概念，为之后的线性方程组打下基础。建立起秩（也就是维数）的概念即可。中文中的维数是一个很直观的叫法，维持不变的数，也暗示了维数是向量空间组的一个固有性质这一概念。

向量组的几何意义

1. 线性组合表示的是向量的数乘和相加。
2. 向量能被向量组表示的原因：向量处于以向量组的极大线性无关组为基的线性子空间里面。向量在向量组的子空间内就可以被表示，不在则不可以。打一个很简单的比方，你不能在一个二维平面上画出一个三维的正方体。注意：向量组也是本身的子空间。
3. 如果两个向量线性相关，那么这两个向量必然在一条直线上；反之线性无关指的是不在一条直线。
4. 二维平面上，任意三个向量必然相关。
5. 向量组是否等价指的是两组向量组张成的空间是否相等。后面有具体公式表示，直观的理解就是两个不相关的二维向量张成了二维空间，也就是说，在二维平面中，随便找出两组两个个不相关的二维向量，都相互等价。
6. 最短的向量组实际就是极大无关组，极大无关组的元素的个数就是向量组的秩。
7. 通过初等变换后的向量的个数就是原 n 维向量组的秩。在整个变换过程中，每一步留下的向量组虽然个数逐步减少，但是每一步向量组的秩却一直没有变，秩是个不变量，即秩是向量组的固有性质。
8. 秩就是维数。在中文中的维数挺有意思，维数维数就是 “维持不变的数” 吧。

向量空间的几何意义

1. 向量空间内的基本原则：相加和数乘都不可以超出空间。所以向量空间的标准定义如下：假设 V 是 n 维向量的集合，如果 V 中的向量对加法和数乘两种运算封闭，即：

$$a, b \in V,\ \ a + b \in V$$
$$a, b \in V,\ \ kb \in V$$

2. 什么是张成的空间？二维向量张成一个平面；三维向量张成如今这个大千世界。有一组很不直观的公式如下：向量组 $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 张成的向量空间为 $\{x_1a_1, x_2a_2, ..., x_na_n | x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{R}\}$。
3. 向量本不依赖于坐标系，但为什么又要让其位于坐标系并有有个共同的原点呢？归根结底还是为了方便运算。
4. 如果向量组 $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 线性无关，且在 V 中任意一个向量都可以用该向量组表示，那么就撑该向量组为空间 V 的一个基。注意，并不一定互相垂直。
5. 基的意义：彼此都不线性相关，都有自己的独到之处，谁也不能代表自己。引入基的概念就是为了为向量空间选择一个坐标系。
6. 标准单位向量组成的基叫做标准基。
7. 特别要注意，在谈论基这一概念时，要抛弃笛卡尔坐标系的思想，即垂直或投影的思想。基并不一定互相垂直，互相垂直的基称之为正交基。
8. 对于整个线性代数而言，基是一个极其极其重要的概念，后续的矩阵变换本质上就是基变换。
9. 向量是不依托于坐标而存在，内积又是向量的一种运算，所以内积的值也不应该依托坐标系而存在。给定向量后，内积的值便也已经确定，但当向量随着基变换而变换后，内积也应该做出相应的变换。也就是说在基发生变换时，向量内积是依托基变换呈现一定的规律的，这一规律便是 Gram 矩阵（内积度量矩阵），即 $S = P^TP$，其中 P 为过度矩阵。
10. 标准正交基的好处就是特别容易计算投影。
11. 标准正交基可以由笛卡尔坐标向量进行镜像或者旋转得到无数的标准正交基，旋转矩阵为：$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
12. 任意基可否转换标准正交基？答案是肯定的，这就是施密特正交化，此处不做详细说明，了解即可。