实对称矩阵的性质

Guangyao Zhao

2022-07-19

Contents

实对称矩阵是正定矩阵

对称矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

的平方为：

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 36 & 49 \\ 36 & 93 & 126 \\ 49 & 126 & 173 \end{bmatrix}$$

注意：以上并不是严格的数学证明，只是便于理解的简单计算。因为是平方，所以不可以出现矩阵为小于 0 的元素，再加上是实对称矩阵，所以最后结果 > 0，即为正定矩阵。

实对称矩阵的特征向量正交

若 x_1 和 x_2 是对称矩阵 A 的特征向量，则：$Ax_1 = \lambda_1 x_1$ 且 $Ax_2 = \lambda_2 x_2$。如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $x_1^T x_2 = 0$。证明过程如下：

1. 假设 $z = x_1^T A x_2$，因为 z 是标量，所以 $z^T = z$，也就是说 $x_2^T A^T x_1 = x_1^T A x_2$
2. 因为 $A^T = A$，所以 $x_2^T A x_1 = x_1^T A x_2$
3. 因为 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ 且 $Ax_2 = \lambda_2 x_2$，所以 $x_2^T \lambda_1 x_1 = x_1^T \lambda_2 x_2$，即 $\lambda_1 x_2^T x_1 = \lambda_2 x_1^T x_2$
4. 其中 $x_1^T x_2 = x_2^T x_1$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。所以 $x_1 x_2 = 0$，即特征向量正交

相似对角化

实对称矩阵一定是正交矩阵，即含有 n 个线性无关的特征矩阵。所以实对称矩阵可以对角化。

把 A 的特征向量 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 排成矩阵 P 的列，运用分块运算技术，把矩阵 A 作为一个整块，或者一个常数；把矩阵 P 中每个列看做一个块（或者元素），运算如下：

$$
\begin{aligned}
AP &= A\left[P_1, P_2, \cdots, P_n\right] = \left[AP_1, AP_2, \cdots, AP_n\right] \\
&= \left[\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_3 P_n\right] \\
&= \left[P_1, P_2, \cdots, P_n\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

显然将最后的矩阵左乘一个 P 矩阵的逆，把 P 消简成单位阵，就得到了由特征值构成的对角阵 A，即 $P^{-1}AP = \Lambda$ 成立。其中 P 是原坐标系下的基向量矩阵（但不一定是单位基向量矩阵）