# 数字特征之期望

Guangyao Zhao

2022-08-11

## Contents



分布时随机变量的概率性质最完整的刻画，它包含了随机变量的所有信息。而随机变量数字特征则是侧重对随机变量某方面定量的描述。

比如我们要对一个事件有一个整体印象时，往往有一个最重要的指标，就是平均水准，比如某班级的成绩，某一行业的收入。

至于成绩的分布和收入的分布，往往不一定是最重要的。期望衡量的是变量的平均水准，本质上就是随机变量值和随机变量概率密度的乘积。

期望这一词出自于赌博，听起来太过于抽象，本不是恰当的名字，但在概率论中已经源远流长，就这么使用了过来。

## 随机变量的期望

### 公式

- 离散型：$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$
- 连续型：$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

### 例子

#### 0-1 分布

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | p | 1-p |

$$E(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

#### 泊松分布

假设 $X \sim \pi(\lambda)$，求 $E(X)$。

泊松分布律：

$$p\{X = k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

接下来计算 $E(X)$：

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

泊松分布的期望就是 $\lambda$，即 $np$。其实也很好理解，有一批产品的良品率是 $p$，现有 $n$ 个产品，求良品的期望，明显就是 $np = \lambda$。泊松分布本质就是二项式分布。

### 均匀分布

假设 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$

均匀分布的公式：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, \text{other} \end{cases}$$

均匀分布的期望：

$$E(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{b+a}{2}$$

### 指数分布

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式。记寿命为 $X$（以年计），规定：

- $X < 1$，付款 $1500$ 元
- $X < 2$，付款 $2000$ 元
- $X < 3$，付款 $3000$ 元

假设寿命服从指数分布，概率密度：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 $Y$ 的期望。

- $P\{X \le 1\} = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = 1 - e^{-0.1}$
- $P\{1 < X \le 2\} = \int_{1}^{2} f(x)dx = e^{-0.1} - e^{-0.2}$
- $P\{2 < X \le 3\} = \int_{2}^{3} f(x)dx = e^{-0.2} - e^{-0.3}$
- $P\{X > 3\} = \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = e^{-0.3}$

综上：$E(Y) = 1500 \times (1 - e^{-0.1}) + 2000 \times (e^{-0.1} - e^{-0.2}) + 2500 \times (e^{-0.2} - e^{-0.3}) + 3000 \times e^{-0.3}$

指数分布本身是一种连续分布，在此处价格设置成了固定价格，所以看起来像离散分布。如果价格和年数有一定的连续关系，则本例子的计算就需要用连续变量的计算方法。

### 随机变量的函数的数学期望

随机变量的函数的数学期望类似于随机变量的分布，只是将变量 $x$ 做了一次 $f(x)$ 变换，本质上这两件事是一件事。直接替代即可，计算公式如下：

对于离散变量：

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{g(x_k)}_{\text{函数变换}} p_k$$

对于连续变量：

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(x)}_{\text{函数变换}} f(x)dx$$

这个比较简单，就不举例了。

### 二维随机变量的函数期望

类似于一维随机变量的函数期望，公式如下：

离散变量，计算出二维随机变量的分布律后计算期望：

$$E(Z) = E(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \underbrace{g(x_i, y_j)}_{\text{函数变换}} p_{ij}$$

连续变量：

$$E(Z) = E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(x,y)}_{\text{函数变换}} f(x,y)dxdy$$

### 数学期望的性质

- $E(C) = C$
- $E(CX) = CE(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$，$X, Y$ 相互独立