条件概率分布

Guangyao Zhao

2022-08-08

Contents

条件概率是联合分布和边缘分布的综合利用。

离散型随机变量

一名射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$，射击直到击中目标两次为止。假设 (X, Y) 分别代表第一次和第二次的射中时的射击次数。求 X, Y 的联合分布和条件分布律。

- 射击中目标两次为止时，总共进行的射击数: $n = 1, 2, 3, \cdots,$
- 射击中目标一次时，总共进行的射击数: $m = 1, 2, 3, \cdots, n-1$
- $n > m$

联合分布律:

第 m 和 n 次命中目标的概率为 p:

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2(1-p)^{(n-2)}$$

由上式子可以看出其实和 m 无关。

事件 X 的边缘分布律:

$$
\begin{aligned}
P\{X=m\} &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} P\{X=m, Y=n\} \\
&= \sum_{n=m+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{(n-2)} \\
&= p^2 \sum_{n=m+1}^{+\infty} (1-p)^{(n-2)} \\
&= p^2 \frac{(1-p)^{(m-1)}}{1-(1-p)} \\
&= p(1-p)^{m-1}
\end{aligned}
$$

事件 Y 的边缘分布律：

$$
\begin{aligned}
P\{Y=n\} &= \sum_{m=1}^{n-1} P\{X=m, Y=n\} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{(n-2)} \\
&= (n-1)p^2(1-p)^{(n-2)}
\end{aligned}
$$

注意，上式子中其实和 m 无关。

条件分布律：

$$
\begin{aligned}
P\{X=m|Y=n\} &= \frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{Y=n\}} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1} \\
P\{Y=n|X=m\} &= \frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{X=m\}} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} = p(1-p)^{n-m-1}
\end{aligned}
$$

连续型随机变量

连续型随机变量的条件概率公式为：

$$
\begin{aligned}
P\{X \le x | y < Y \le y+\epsilon\} &= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_Y(y)} \\
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\text{联合概率}}{\text{边缘概率}}
\end{aligned}
$$

设二维随机变量 (X, Y) 在圆 $x^2+y^2 \le 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

联合概率分布：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2\leq 1\\ 0, \text{other}\end{cases}$$

边缘概率分布：

在 y 取值范围为 $[-1,1]$ 时，$-\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}$。所以 y 的边缘分布为：

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\\&=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx\\&=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi},(-1\leq y\leq 1)\end{aligned}$$

条件分布为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$$

相应的，当 $y=0$ 时结果为 $\frac{1}{2}$，也就是半圆。