欧拉法

Guangyao Zhao

2022-12-17

Contents

在开始前，统一一下数学语言：

- 自变量：x_n
- 因变量：$y(x_n)$
- 迭代微小距离：h
- 导函数：$f(x_n, y(x_n))$
- 精确值：$y(x_n)$
- 估计值：y_n

目标是，知道初始值 $y(x_n)$，和导函数 $f(x_n, y(x_n))$，求解 $x_n + h$ 处的 $y(x_{n+1})$ 值。

前向欧拉法

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h * f(x_n, y(x_n))$$

即，知道初始值 $y(x_n)$ 和导数 $f(x_n, y(x_n))$，即可计算出 $y(x_{n+1})$。

后向欧拉法

$$y(x+h) = y(x) + h * f(x, y(x+h))$$

我们的目的是求 $y(x+h)$，结果后向欧拉法在求解其值的时候反而需要他自己，所以后向欧拉法并不能直接求解，需要按照以下步骤：

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x_{n+1}) &= y(x_n) + h * f(x_n, y(x_n)) \\
y^{(1)}(x_{n+1}) &= y(x_n) + h * f(x_{n+1}, y^{(0)}(x_{n+1})) \\
y^{(2)}(x_{n+1}) &= y(x_n) + h * f(x_{n+1}, y^{(1)}(x_{n+1})) \\
&\vdots \\
y^{(n)}(x_{n+1}) &= y(x_n) + h * f(x_{n+1}, y^{(n-1)}(x_{n+1}))
\end{aligned}$$

直到 $y^{(n)}(x_{n+1})$ 收敛为止。

梯形法

无论是显示法还是隐式法的精度都不高，为了得到更高的精度，就想到了将两者结合，也就是梯形法：

由 Figure 3 可知，梯形的精度要比显示法和隐式法都高，计算公式：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\right)$$

改进欧拉法

由 Sec. 可知，梯形法综合了显示欧拉和隐式欧拉可得到更高的精度，但是一个问题是其中的隐式欧拉法并不容易直接求解。改进欧拉法的计算方法如下：

$$\begin{aligned}
\text{预测：} y_p &= \overline{y_{n+1}} = y(x_n) + f(x_n, y_n) \\
\text{校正：} y_c &= y_{n+1} = y(x_n) + f(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}}) \\
\text{计算：} y_{n+1} &= y(x_n) + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)
\end{aligned}$$

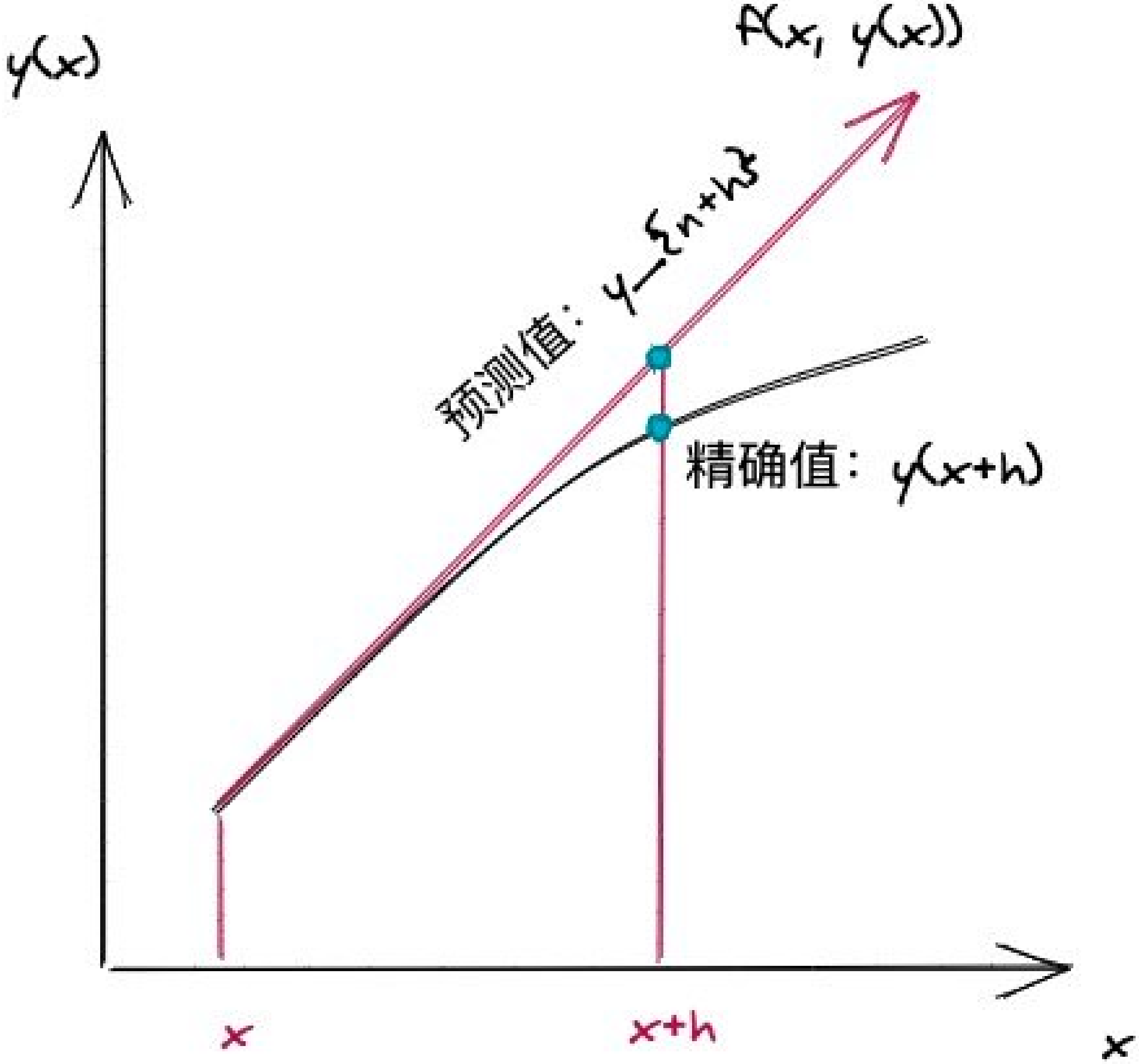

Fig. 1: 前向（显式）欧拉法

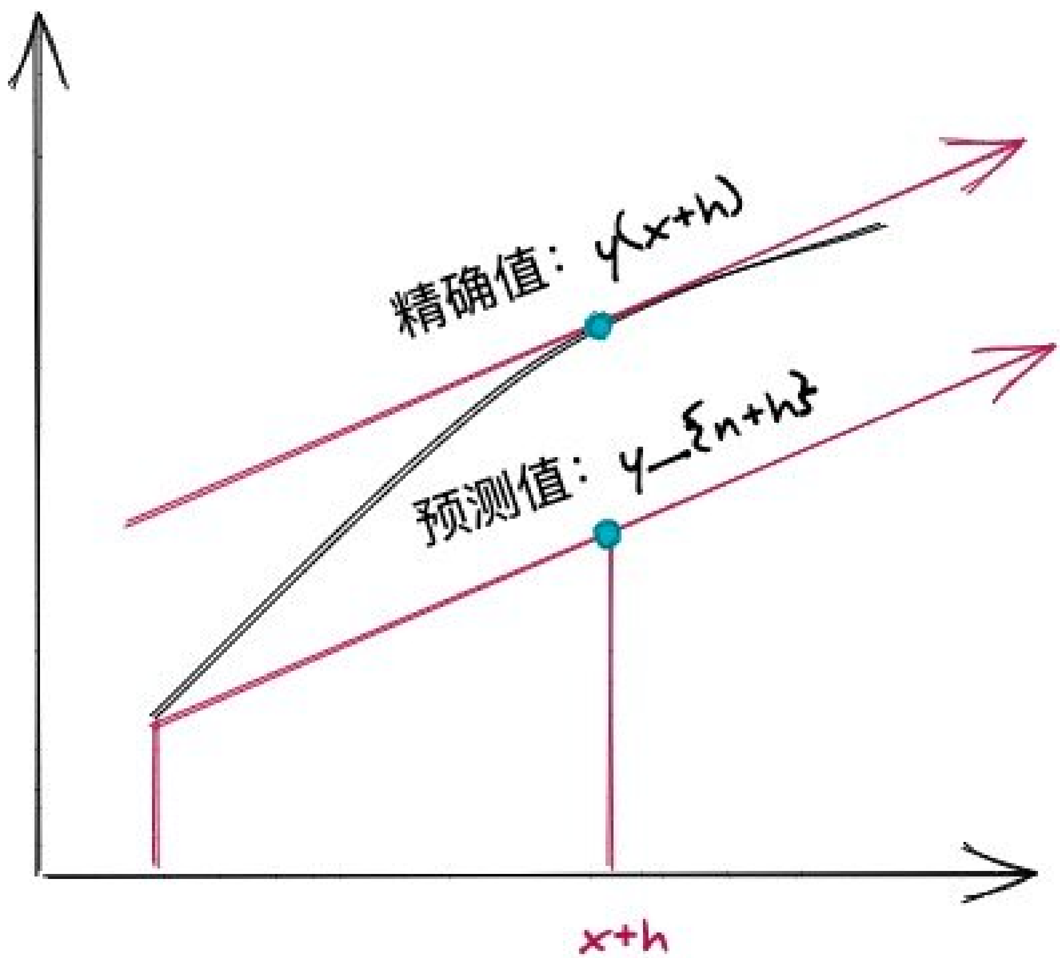

Fig. 2: 后向（隐式）欧拉法

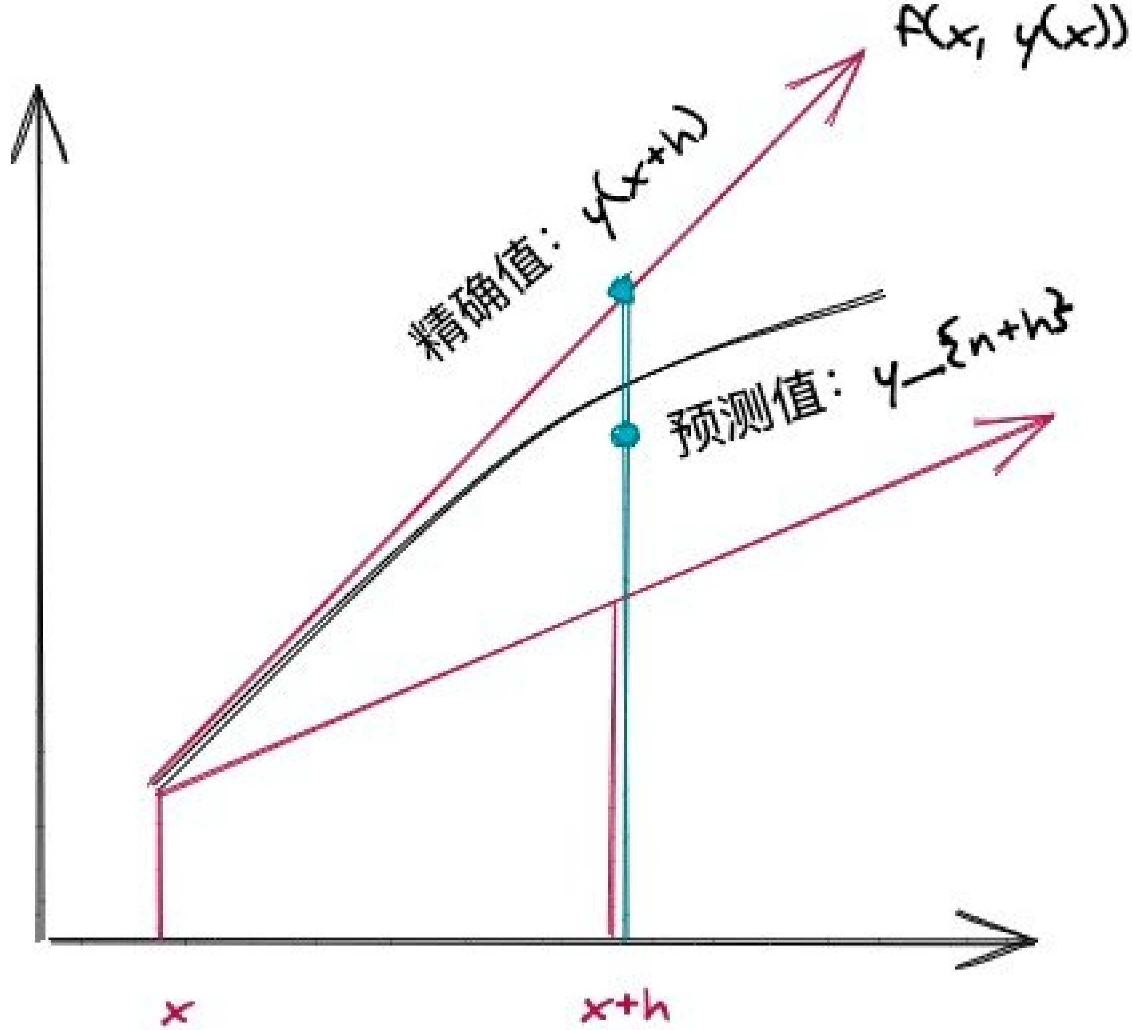

Fig. 3: 梯形法