矩和协方差矩阵

Guangyao Zhao

2022-08-13

Contents

矩的定义

k 阶矩

假设 X 是随机变量，若：

$$E(X^k), k = 1, 2, ...,$$

存在，则称其为 X 的 k 阶原点矩，简称 k 阶矩。显然 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩。

k 阶中心矩

假设 X 是随机变量，若：

$$E\{[X - E(X)]^k\}, k = 2, 3...,$$

存在，则称其为 X 的 k 阶中心矩。显然 X 的方差 $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩。

$k+l$ 阶混合矩

假设 X,Y 是随机变量，若：

$$E(X^kY^l), k, l = 1, 2, ...,$$

存在，则称其为 X,Y 的 $k+l$ 阶混合矩。显然 XY 的数学期望 $E(XY)$ 是 X,Y 的二阶混合矩。

$k+l$ 阶混合中心矩

假设 X,Y 是随机变量，若：

$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}, k = 1, 2, ...,$$

存在，则称其为 X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。显然 X,Y 的协方差 $Cov(X,Y)$ 是 X,Y 的二阶混合中心矩。

矩的一些应用

- 一阶矩是均值
- 二阶中心距是方差
- 三阶标准矩是偏度
- 四阶标准矩是峰度

协方差矩阵

协方差差矩阵的应用很广，可以理解为对多变量的协方差的批量求解，形式如下：

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}-\mathrm{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X}-\mathrm{E}[\mathbf{X}])^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \begin{bmatrix}
\mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)] \\
\mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)(X_n-\mu_n)] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1)] & \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_2-\mu_2)] & \cdots & \mathrm{E}[(X_n-\mu_n)(X_n-\mu_n)]
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
D(X_1,,X_1) & Cov(X_1,X_2) & \dots & Cov(X_1,X_n) \\
Cov(X_2,X_1) & D(X_2,X_2) & \dots & Cov(X_2,X_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_1) & \dots & Cov(X_n,X_n)
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

在主成分分析（PCA）中会用到该公式。