行列式的几何意义

Guangyao Zhao

2022-03-05

Contents

行列式的定义 1
二阶行列式的几何意义 2
二阶行列式性质的几何解释 2

行列式的存在就是为了给线性方程组服务，注意，它的概念早于矩阵，故应该在学完向量后就学习行列式，再学习矩阵。这样有利于对线性代数整个科目的理解。本章重点学习行列式的初等变换和意义。二维行列式本质上是平行四边形的有向面积，这点就和向量的叉乘联系了起来。

行列式的定义

1. 行列式先于矩阵出现，因为行列式属于算术，是线性方程组的工具，而解方程组不需要矩阵的概念。
2. 行列式指的是行向量或者列向量构成的平行多面体的有向体积。
3. 行列式的计算和向量的叉积是一个概念。
4. 行列式是由一些数据排列形成的方阵经过规定的计算方法而得到的一个**数**，这点需要和矩阵区别开来，矩阵是一个**数表**。行列式需要对这个数表按照规则进一步计算，最终得到一个实数，复数或者多项式（含有未知数时）。n 阶行列式的计算如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

5. 矩阵 A 的行列式 $\det A$ 就是线性变换 A 的图形面积或体积。

二阶行列式的几何意义

二阶行列式的几何意义 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)$ 是 xoy 平面上以行向量 $a = (a_1, a_2)$ 和 $b = (b_1, b_2)$ 为邻边的平行四边形的有向面积（此处有点废话，因为这是叉积的定义）。下面给出证明过程：

在二维几何空间 $\mathbb{R}^2$ 中取得一个直角坐标系 $\{0; e_1, e_2\}$，设 $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ 和 $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$，则以 a 和 b 为边的四边形面积为：

$$S(a,b) = ab\sin < a, b >$$

其中：

1. $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
2. $ab\sin < a, b >= \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{a_1}{a}\frac{b_2}{b} - \frac{a_2}{a}\frac{b_1}{b} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{ab}$

综上 $S(a,b) = ab\sin < a, b >$ 得以证明，即二阶行列式是平行四边形的有向面积，也是两个向量的外积。

二阶行列式性质的几何解释

此处图形请参考任广千老师的图解线性代数。

性质一：

$$k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

两个行向量 a 和 b 所组成的平行四边形的 k 倍面积等于这样两个向量 ka 和 b 所组成的平行四边形面积，即：$S(ka,b)=kS(a,b)$

性质二：叉积分配律

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

一个行列式可以通过拆分为某一行向量而得到两个行列式之和：$S(a,b+c)=S(a,b)+S(a,c)$

性质三：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{vmatrix} = 0$$

显然两个向量 a 和 ka 重线，即组成的平行四边形面积为 0

性质四：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

显然根据外积定义：$a\times b=b\times a$

性质五：切换

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix}$$

在同一平面上，两个平行四边形的底高分别相同，则面积相等。此性质相当于将原平行四边形扭转了一定的角度，面积不变。

性质六：转置

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

即转置前后所组成的平行四边形面积相等。