

# 贝叶斯定理

Guangyao Zhao

2022-08-01

## Contents

全概率公式是由原因导向结果，而贝叶斯是由结果导向原因。下面由一个例子宏观理解下这一概念。

村里有且仅有 2 个小偷 A 和 B，根据统计村里盗窃案：

- A 偷东西的可能性是 0.2，且 A 偷成功的概率是 0.8
- B 偷东西的可能性是 0.8，且 B 偷成功的概率是 0.3

现在问题来了，如果发现村里有东西被偷了，那么是谁偷走的概率比较大呢？在此处显然是一个有结果推原因的问题：结果是「东西已经被偷」，原因是「谁偷的」。

由已知信息可推断在发生盗窃的情况下东西成功被偷走的概率为：

$$\begin{aligned}P(H) &= P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) \\ &= 0.8 * 0.2 + 0.3 * 0.8 \\ &= 0.4\end{aligned}$$

也就是说，如果小偷实施了盗窃，那么被偷走的概率就是 0.4。那么：

被 A 偷走的概率：

$$P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H)} = \frac{0.8 * 0.2}{0.4} = 0.4$$

被 B 偷走的概率：

$$P(B|H) = \frac{P(H|B)P(B)}{P(H)} = \frac{0.3 * 0.8}{0.4} = 0.6$$

从以上可以看出，贝叶斯想表达的是，在已知结果的情况下，分别由各个基本事件导致的概率。感性地可以认为，导致这个结果，大家都需要分别承担一定的责任比例。整个事件发生的概率是  $P(H)$ ，A 导致该事件发生的能力为  $P(H|A)P(A)$ ，B 导致该事件发生的能力为  $P(H|B)P(B)$ 。那么自然而然可以认为彼此需要承担的责任比例为： $P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H)}$  和  $P(B|H) = \frac{P(H|B)P(B)}{P(H)}$ 。