连续变量的商和积

Guangyao Zhao

2022-08-10

Contents

连续变量的商

假设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，具有概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = \frac{Y}{X}$ 仍为连续型随机变量，其概论密度：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dz \overset{X,Y\text{独立}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dz$$

例子

某公司提供一种地震保险，保险费 Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{25} e^{-y/5}, y > 0 \\ 0, \text{other} \end{cases}$$

保险赔付 X 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, x > 0 \\ 0, \text{other} \end{cases}$$

假设 X 和 Y 相互独立, 求 $Z=Y/X$ 的概率密度

由商的密度分布可知: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dz \stackrel{X,Y\text{独立}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dz$。接下来看该例子积分被积函数何时不为零:

$$\begin{cases} f_X(x)\neq 0, x>0 \\ f_Y(xz)\neq 0, xz>0 \end{cases}$$

则 $x>0, z>0$。接下来分情况讨论:

当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}|x|\frac{1}{5}e^{(-x/5)}\frac{xz}{25}e^{-xz/5}dx=\frac{2z}{(1+z)^3}$$

连续变量的积

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量, 具有概率密度为 $f(x,y)$, 则 $Z=XY$ 仍为连续型随机变量, 其概论密度:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,xz)dz \stackrel{X,Y\text{独立}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dz$$