连续随机变量的和分布

Guangyao Zhao

2022-08-09

Contents

和分布公式（卷积公式）

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x, z-x)}_{\text{联合分布}} dx \overset{X,Y\text{独立}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_X(x) f_Y(z-x)}_{\text{边缘分布乘积}} dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy \overset{X,Y\text{独立}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

证明

$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$，所以目的是凑出 $\int_{-\infty}^{z} f(z)dz$ 的形式。按照定义法 $F_Z(z)$：

$$F_Z(z) = P\{X + Y \leq Z\} = P\{X + Y \in G\} = \iint_G f(x, y) dxdy, G : X + Y \leq Z$$

以 x 为基准积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right] dy$$

其中 y,z 为常数。接下来开始最重要的内容，凑出 $\int_{-\infty}^{z} f(z)dz$ 的形式，令 $x = u - y$，则 $dx = du$，$x \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$，$x = z - y \Rightarrow u = z$，则：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy,\text{将变量替换为 u，和 x 已经无关系} \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy\right]dz
\end{aligned}$$

即：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$。同理：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

例子

假设 (X,Y) 互相独立，都服从 $N \sim (0,1)$ 分布，概率密度为：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}} f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x^2+xz)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2+\frac{z^2}{4}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt, \left(t = x - \frac{z}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}, \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}
\end{aligned}
$$

即: 若 (X, Y) 独立, 则之和仍为正态分布, 新的正态分布服从:

$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$